1741

De oscillationibus fili flexilis quotcunque ponduscculis onusti

Leonhard Euler

DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS QVOTCVNQVE PONDVSCVLIS ONVSTI.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabb. II. III. IAm ante complures annos, cum *Cl. Bernoullius* hic commoraretur, quaeſtio inter nos incidebat, de curuatura catenae circa alterum terminum fixum oſcillantis. Experientia autem nos docebat curuas maxime irregulares easque diuerſiſſimas ſatisfacere, ex quo problema non ſolum difficillimum, ſed etiam vires humanas, niſi reſtrictio adhibeatur, exſuperans iudicauimus. Hanc ob rem noſtras cogitationes ad oſcillationes infinite paruas tantum aduertimus, quo caſu ſolutionem multo minus laboris requirere facile praeuideramus. Neque vero has infinite paruas oſcillationes omnes perſequi idoneum viſum eſt, ſed eas duntaxat, in quibus ſingulae catenae partes ſimul ad lineam verticalem tanquam ad ſtatum naturalem perueniunt. Obſeruauimus enim ſaepius accidere, vt catena oſcillans nunquam tota in directum extendatur, neque eius partes omnes ſimul per lineam verticalem tranſeant; facile autem praeuidebamus oſcillationes initio ita temperari poſſe, vt ſingulae partes ſimul ad lineam verticalem ſint peruenturae. Ex quibus ſequens formauimus problema; Inue-

nire

Fig. 1.

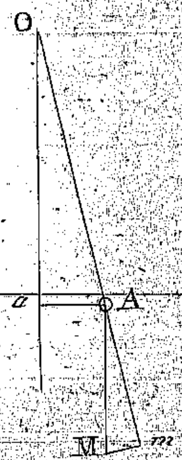


Fig. 2.

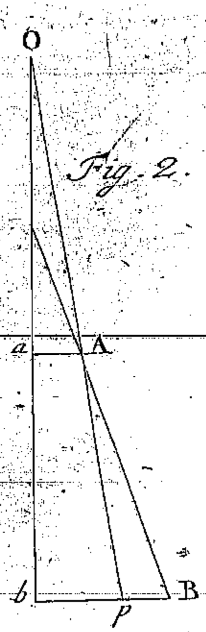


Fig. 3.

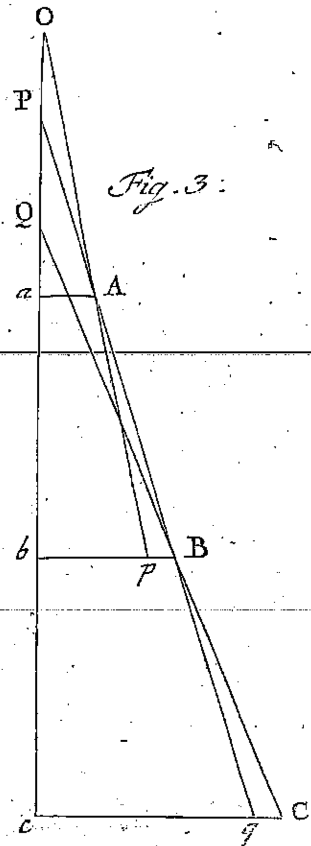


Fig. 4.

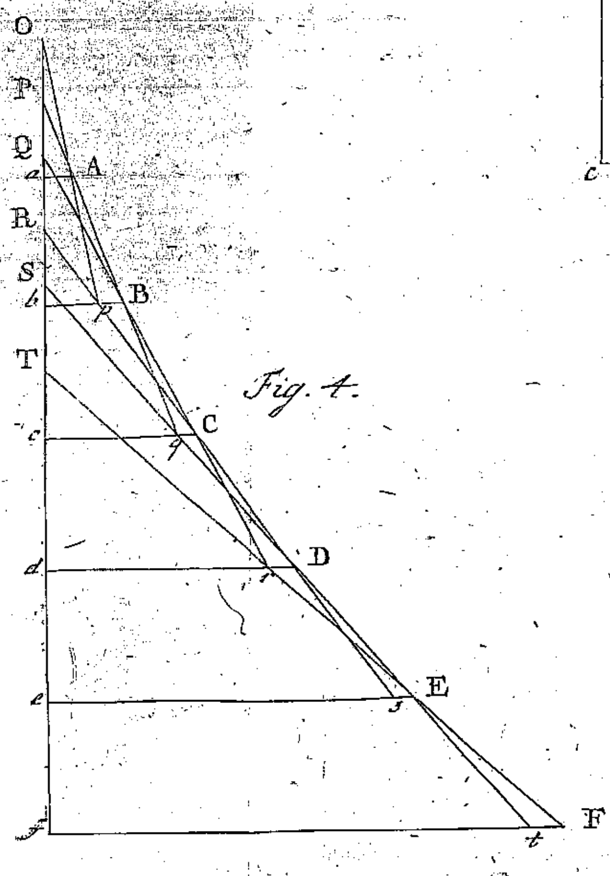
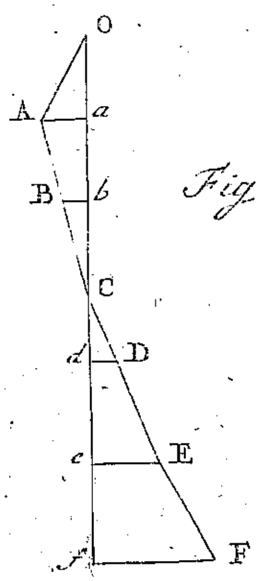


Fig. 5



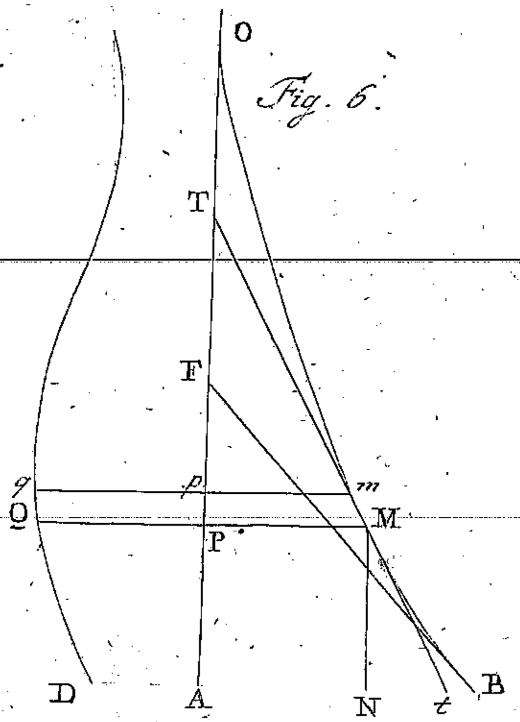


Fig. 6.

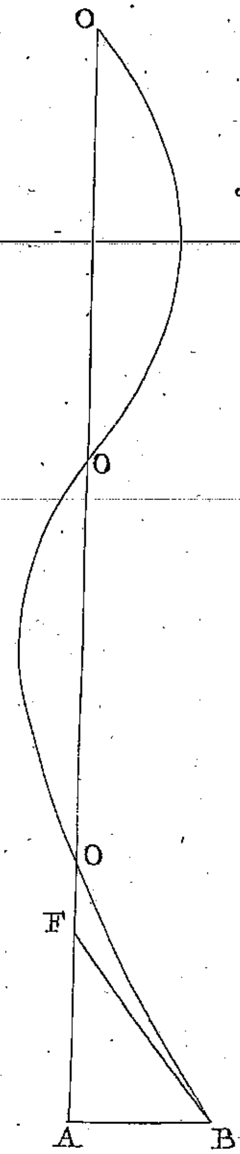


Fig. 7.

nire curuaturam catenae ita oſcillantis, vt eius ſingulae partes ſimul ad lineam verticalem perueniant, atque longitudinem penduli ſimplicis eodem tempore ſuas oſcillationes abſoluentis.

§. 2. Ad hoc autem problema ſoluendum catena conſideranda eſt tanquam filum perfecte flexile et grauitatis expers, infinitis ponduſculis oneratum. Eodem enim modo catena conſiderari ſolet, quando catenae in vtroque termino ſuſpenſae figura ſeu curua catenaria inquiritur. Quo igitur ad ſolutionem huius problematis via debito modo ſternatur filum flexile et grauitatis expers eſt conſiderandum, quod primum vnico tum duobus, deinceps tribus, quatuor, etc. ponduſculis ſit oneratum, quo ex his concluſio ad caſum infinitorum ponduſculorum fieri queat. Hinc ſequentes natae ſunt quaeſtiones praeliminares: ſi filum perfecte flexile duobus, tribus, et deinde quotcunque ponduſculis in datis diſtantiis a ſe inuicem diſpoſitis, fuerit oneratum, inuenire poſitionem ponduſculorum extra ſtatum naturalem vt ſingula ſibi permiſſa ad lineam verticalem ſeu in ſtatum naturalem ſimul perueniant; atque hoc inuento determinare longitudinem penduli ſimplicis iſochroni. In his vero ſemper oſcillationes infinitae paruae tantum conſiderantur, quippe quae omnes, vt patebit, inter ſe ſunt iſochronae; quamobrem illa ponduſculorum poſitio infinite parum a linea verticali diſcrepabit.

§. 3. Atque hae ſunt quaeſtiones, quas *Cl. Bernoullius* ante abitum ſolutas dedit ſine demonſtrationibus, nunc

nunc vero ſimul demonſtratas huc miſit. Cum vero iam illo tempore hae quaeſtiones Illum inter eiusque Patrem et me agitarentur, ipſe quoque earum ſolutiones dedi cum hiſce *Bernoullii* ſolutionibus egregie conſpirantes. At cum nunc perſpiciam eius methodum a mea prorſus differentem, ad augmentum ſcientiae non parum vtile fore iudicaui, ſi et meam methodum hac diſſertatione expoſuero. Cum enim huius modi quaeſtiones ſint nouae et ad mechanicae partem adhuc nouam, et a nemine pertractatam pertineant, nihil magis ad excolendam hanc mechanicae partem eſt exoptandum, quam plures methodi, quibus idem problema ſolui queat.

Figura 1. §. 4. Quo igitur a ſimpliciſſimis exordiar, ſit filum grauitatis expers OA vnico ponduſculo A oneratum, quod cum linea verticali Oa angulum infinite paruum AOα conſtituat. Hoc igitur pendulum ſibi permiſſum oſcillationes faciet eundo in ſitum Oa, tantumque vltra illum tranſiendo. Hoc nobis erit pendulum ſimplex, cum quo ſequentia pendula compoſita comparabimus; Dum vero hoc pendulum ad Oa mouetur corpori A deſcribenda eſt via Aa, reipſa quidem arcus circularis centro O deſcriptus, ſed qui cum horizontali Aa propter angulum AOa infinite paruum congruet. Inueſtigandum ergo eſt, quanta vi acceleratrice corpus A per Aa propellatur. Corpus vero A vi grauitatis, quae aequalis eſt ponderi corporis A, deorſum ſecundum directionem AM trahitur; haec ergo vis ſi reſoluatur in duas laterales Am, et Mm, altera in directione

tione Am tota ad tendendum filum inſumetur, altera vero in directione Mm corpus per Aa vrgebit. At vero ob triangula OAa, AMm ſimilia erit vis filum AO tendens $= \frac{A.Oa}{AO} = A$, et vis corpus per Aa trahens $= \frac{A.Aa}{AO}$; vis vero accelerans habebitur, diuiſa vi abſoluta $\frac{A.Aa}{AO}$ per maſſam A mouendam, vnde vis accelerans eſt $\frac{Aa}{AO}$. Perſpicitur ex hoc ſi ſpatium percurrendum Aa diuidatur per vim accelerantem, prodituram eſſe longitudinem penduli AO, iſochroni cum motu per Aa. Quare ſi in ſequentibus caſibus determinauerimus vim acceleratricem, qua quodque corpus ad verticalem ſollicitatur, habebimus ſimul longitudinem penduli ſimplicis iſochroni. Atque cum in caſu plurium corporum, ſingula ſimul peruenire debeant ad verticalem, cuiusque vis acceleratrix proportionalis eſſe debet diſtantiae a linea verticali Oa, ex quo poſitio corporum determinabitur.

§. 5. Sint filo OAB in O fixo duo annexa ponduſcula A et B, et ſitus fili infinite parum a verticali Ob differens. Demittantur ex A et B in verticalem Ob perpendicula Aa, Bb, quae vt viae conſiderari poterunt a corpuſculis abſoluendae. Fili pars BA producatur vsque ad lineam verticalem in P, et OA in p vsque. Ex praecedentibus iam liquet vim grauitatis corporis B duplicem exerere effectum, alterum quo corpus B per Bb vrgetur, quae vis erit $= \frac{B.Bb}{BP}$, alterum vero, quo tenditur filum BA, quae vis eſt $= B$, ob ang. BPb infinite paruum. Hac vero vi cor- Figura 2.

corpus A afficietur secundum directionem AB, ad cuius effectum inueniendum resoluatur ea in duas, alteram in directione $Ap = \frac{B.Ap}{AB} = B$, quae filum OA tendit: alteram in directione horizontali, quae erit $= \frac{B.Bp}{AB}$, atque pro negatiua est habenda, quia motum per Aa retardat. Atque in hoc consistit effectus ponderis B. Pondus A vero vt ante vrgebit per Aa vi $= \frac{A.Aa}{AO}$, et filum OA tendet vi $= A$. Sollicitabitur ergo corpus A vi acceleratrice $\frac{Aa}{AO} - \frac{B.Bp}{A.AB}$, et corpus B vi acceleratrice $\frac{Bb}{BP}$. Quo igitur corpora A et B simul ad lineam verticalem perueniant, hae vires acceleratrices proportionales esse debebunt viis describendis scilicet $\frac{Aa}{AO} - \frac{B.Bp}{A.AB} : Aa = \frac{Bb}{BP} : Bb$. Et longitudo penduli isochroni erit $BP = \frac{A.AO.AB.Aa}{A.AB.Aa - B.AO.Bp}$.

§. 6. Est vero $BP = bP$ propter ang. bPB infinite paruum, atque ob $Bb - Aa : ab = Bb : bP$ erit $BP = \frac{Bb.ab}{Bb - Aa}$. Atque cum sit $bp = \frac{Aa.Ob}{Oa}$, erit $Bp = Bb - \frac{Aa.Ob}{Oa}$. Deinde propter $OA = Oa$ et $AB = ab$ habebitur haec analogia $A.Aa.Ob - B.Bb.Oa + B.Aa.Ob : A.Aa.Oa = Bb - Aa : Bb$ Sit longitudo penduli isochroni $= f$, habebuntur hae duae aequationes $\frac{Bb.ab}{f} = Bb - Aa$ atque $\frac{A.Aa.Oa.ab}{f} = A.Aa.ab - B.Bb.Oa + B.Aa.Ob$. Vel eliminata f prodibit ista aequatio $A.Aa.Bb.Oa - A.Aa^2.Oa = A.Aa.Bb\,ab - B.Bb^2.Oa + B.Aa.Bb.Ob$. Quae aequatio cum duas habeat radices, duplicem dabit situm pondusculorum A et B, et B, in quorum vtroque ſimul ad verticalem pertingunt. Motus vero erit huiusmodi, vt inter mouendum OA et AB maneant eiusdem longitudinis et punctum P in eodem loco reſtet.

§. 7. Si fili partes OA et AB fuerint inter ſe aequales, erit $Oa = ab$ et $Ob = 2\,Oa$, vnde ſequentes duae oriuntur aequationes $\frac{Bb.Oa}{f} = Bb - Aa$ et $\frac{Aa.Oa}{f} = Aa - \frac{B.Bb}{A} + \frac{2B.Aa}{A}$; vel haec vnica $A.Aa^2 = B.Bb^2 - 2B.Aa.Bb$, vnde oritur $\frac{Bb}{Aa} = 1 \pm \sqrt{(1 + \frac{A}{B})}$, pro duplici ponduſculorum ſitu.

§. 8. Si praeterea ponduſcula A et B fuerint inter ſe aequalia, erit $\frac{Bb.Oa}{f} = Bb - Aa$ et $\frac{Aa.Oa}{f} = 3Aa - Bb$. atque $\frac{Bb}{Aa} = 1 \pm \sqrt{2}$. Altero ergo ſitu Aa et Bb in eandem partem verticalis Ob cadunt, altero in diuerſas.

§. 9. Sint nunc filo in O fixo tria ponduſcula, A, B et C annexa infinite parum a verticali Oc diſſita. Ducantur horizontales Aa, Bb, Cc, ſeu viae a corporibus ſimul deſcribendae; et producantur BA in P; CB in Q; item OA in p et AB in q. His poſitis pondus C efficiet, vt partim corpus C ſecundum Cc vrgeatur vi $= \frac{C.Cc}{CQ} = \frac{C.Cc}{cQ}$ partim vero filum BC tendatur vi $= \frac{C.cQ}{CQ} = C$. Hac autem vi corpus B ſollicitabitur in directione BC. Reſoluatur haec vis in duas, quarum altera eſt horizontalis et corpus B a verticali Oc retrahat $= \frac{C.Cq}{BC} = \frac{C.Cq}{bc}$; altero vero tendat filum BA quae eſt $= \frac{C.Bq}{BC} = C$. Nunc ſumatur pondus B, quo partim Figura 3.

 vrge-

vrgebitur B verſus Bb vi $= \frac{B.Bb}{BQ} = \frac{B.Bb}{bQ}$ partim vero tenditur filum BA vi $= B$. Tota ergo vis qua filum BA tenditur eſt $B+C$, hac vi corpus A ſollicitabitur horizontaliter ab verticali Oc vi $= \frac{(B+C)Bp}{BA} = \frac{(B+C)Bp}{ab}$, atque filum AO tendetur vi $= B+C$. Pondus denique A efficiet vt corpus A ſecundum Aa ſollicitetur vi $= \frac{A.Aa}{AO} = \frac{A.Aa}{aO}$, ſimulque tendatur filum AO vi $= A$; ita vt tota vis, quae filum AO tenditur, ſit $= A + B + C$.

§. 10. His igitur colligendis corpus C per Cc vrgebitur vi $= \frac{C.Cc}{cQ}$; at corpus B per Bb vrgebitur vi $= \frac{B.Bb}{bP} - \frac{C.Cq}{bc}$, atque corpus A per Aa trahetur vi $= \frac{A.Aa}{aO} - \frac{(B+C)Bp}{ab}$. Cum igitur ſingula corpora ſimul ad lineam verticalem peruenire debeant, ſi ponatur longitudo penduli iſochroni $= f$, erit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ}$ ſeu $f = cQ$, atque $\frac{B.Bb}{f} = \frac{B.Bb}{bP} - \frac{C.Cq}{bc}$; ac $\frac{A.Aa}{f} = \frac{A.Aa}{aO} - \frac{(B+C)Bp}{ab}$. Ex quibus tribus aequationibus dato ſitu corpuſculi A, determinabitur ſitus ponduſculorum B et C, quo omnia tria corpora ſimul ad verticalem perueniant. Prodibit autem triplex ſitus propter aequationem cubicam reſoluendam. Motus vero ad verticalem ita fiet, vt fila OA, AB et BC eandem ſeruent longitudinem et puncta P et Q inuariata maneant.

§. 11. Si et corpora A, B et C fuerint inter ſe aequalia et diſtantiae aequales, erit ob $cQ = \frac{Cc.bc}{Cc-Bb}$, $bP = \frac{Bb.ab}{Bb-Aa}$ et $Cq = Cc - 2Bb + Aa$ et $Bp = Bb - 2Aa$;

[illegible] $\frac{Oa}{f} = \frac{Cc - Bb}{Cc}$ et $\frac{Oa}{f} = - \frac{Cc + 3Bb - 2Aa}{Bb}$ atque $\frac{Oa}{f} = \frac{5Aa - 2Bb}{Aa}$. Hinc elicitur $Cc = \frac{Aa.Bb}{2Bb - 4Aa}$ et Bb inuenitur ex hac aequatione:

$$4Bb^3 = 12Aa.Bb^2 - 3Aa^2.Bb - 8Aa^3.$$

Hinc fit quam proxime:

$$Bb = 2,295\,Aa \text{ vel}$$
$$Bb = 1,348\,Aa \text{ vel}$$
$$Bb = -0,643\,Aa.$$

§. 12. Sit nunc filum quotcunque pondusculis oneratum in punctis A, B, C, D etc. quorum vltimum sit F; ducantur per haec singula puncta horizontales Aa, Bb, Cc, etc. et singulae fili partes vtrinque producantur vt ante factum est. Consideretur corpus quodcunque C, quod duplici vi sollicitatur, vi propriae grauitatis scilicet, et vi tendente fili portionem CD, tenditur vero hoc filum a vi, quae aequalis est summae omnium sequentium pondusculorum D + E + F, vt in praecedentibus vidimus. Propria vero corporis C grauitas efficit, vt corpus per Cc vrgeatur vi $= \frac{C.Cc}{cQ}$. At vis tendens filum CD, resoluta retrahet corpus Ca verticali vi $= \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Quare tota vis, qua C secundum Cc vrgetur erit $= \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Si ergo tempus per Ca aequale esse debeat tempori, quo pendulum simplex longitudinis f descensum absoluit, erit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Similis aequatio inuenitur pro singulis corpusculis, ita vt prodeant tot aequationes, quot Figura 4.

sunt

ſunt corpuscula. Ex quibus aequationibus ſitus corpusculorum determinabitur, qui pro numero eorum variari poterit.

§. 13. Longitudo penduli iſochroni f ſemper aequalis eſt vltimae fili parti E F ad lineam verticalem Of vsque productae, nempe rectae F T. Atque figura O A B C etc. in deſcenſu ita immutabitur vt puncta P, Q, R, S, T maneant inuariata. Ex quo perſpicitur diſtantias Aa, Bb, etc. in eadem ratione diminutum iri, id quod etiam ex hoc intelligitur, quod hae diſtantiae Aa, Bb, Cc etc. ſimul debeant confici; atque ſimiliter, quia vires acceleratrices his diſtantiis ſunt proportionales. Praeterea ex his elucet, ſi figura fili fuerit huiusmodi, vt alicubi tranſeat per lineam verticalem vt in C, in oſcillationibus huius fili punctum C perpetuo in eodem loco eſſe permanſurum. Pars igitur penduli C D E F circa punctum fixum C oſcillationes eodem tempore abſoluet, quo totum pendulum O A B C D E F, ſimili modo intelligitur etiam ſupra O filum cum corpusculis continuari poſſe manente tempore oſcillationum. Ex parte ergo infima fili E F ſuperiores partes omnes in infinitum vsque poterunt determinari, vt totum filum perpetuo in oſcillando ad lineam verticalem peueniat.

Figura 5. §. 14. Sint nunc tam omnia corpuscula quam eorum inter ſe interualla aequalia, erunt E F, D E, C D etc. nec non ef, de, cd etc. inter ſe aequalia. Ponatur longitudo penduli ſimplicis iſochroni F T ſeu $fT = f$, et $Ff = a$, et diſtantia duorum corpusculorum proximorum

morum $= b$; ex his determinari poterit ſitus cuiusque corporis. Nam vis ſollicitans corpus E per Ee aequalis eſt $\frac{E.Ee}{eS} - \frac{F.Ft}{ef}$, quae aequalis eſſe debet $\frac{E.Ee}{f}$, vnde ob aequalia corpora erit $\frac{Ee}{f} = \frac{Ee}{eS} - \frac{Ft}{ef}$. Eſt vero $Ff - Ee : ef = a : f$ vnde $Ee = \frac{a(f-b)}{f}$. Porro eſt $Ee - Dd : b = Ee : eS$. et $Ft = Ff - 2Ee + Dd$. Vnde inuenitur $Dd = \frac{a(2ff - 4bf + b^2)}{2ff}$. Quia porro eſt $\frac{Dd}{f} = \frac{Dd}{dR} - \frac{2Es}{cd}$ et $\frac{Dd - Cc}{b} = \frac{Dd}{dR}$ et $Es = Ee - 2Dd + Cc$ prodibit $Cc = \frac{a(6f^3 - 18bf^2 + 9bbf - b^3)}{6f^3}$. Simili modo ob $\frac{Cc}{f} = \frac{Cc}{cQ} - \frac{3Dr}{b}$ et $\frac{Cc}{cQ} = \frac{Cc - Bb}{b}$ et $Dr = Dd - 2Cc + Bb$ obtinebitur $Bb = \frac{a(24f^4 - 96bf^3 + 72b^2ff - 16b^3f + b^4)}{24f^4}$. Quae eſt diſtantia quinti corpuſculi a linea verticali. Hinc concluditur diſtantia corpusculi $(n+1)$ indicis a linea verticali $= a\left(1 - \frac{nb}{1.f} + \frac{n.(n-1)b^2}{1.\ 4.\ f^2} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{1.\ 4.\ 9.\ f^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)b^4}{1.\ 4.\ 9.\ 16.\ f^4} - \text{etc.}\right)$

§. 15. Si interualla OA, AB, BC etc. fuerint infinite parua, vt tanquam elementa curuae OABCD etc. conſiderari queant, innoteſcet hinc natura huius lineae curuae, quae oſcillans tota eodem momento ad lineam verticalem pertingit. Nam cum in quouis loco ſit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+E)Dr}{cd}$, ſi fc ſumatur pro abſciſſa et Cc pro applicata, erit CQ ſubtangens curuae in C, $(D+E+F)$ erit pondus omnium ponduſculorum, quibus pars fili infra C eſt onerata, cd eſt elementum abſciſſae et Dr per differentiale ſecundi gradus applicatae dabitur. Symbola ergo loco horum ſubſtituta expriment naturam curuae

curuae quaesitae. Atque haec curua erit ipsa figura catenae oscillantis, quae in lineam rectam mutatur, quoties ad lineam verticalem peruenit. At siue catena vbique sit eiusdem crassitiei, siue secus, elementa curuae OA, AB, BC etc. nihilominus aequalia accipi possunt, dummodo ponduscula pro natura catenae recte assumantur. Sumtis autem elementis curuae aequalibus, elementa abscissae quoque erunt aequalia, atque Dr erit differentiale secundi gradus applicatae.

Figura 6. §. 16. Sit igitur OMB catena seu funis vtcunque crassus ex O suspensus, atque talem figuram habens OMB, vt figuram rectilineam OA induat, cum in situm verticalem peruenerit. Exprimat curua DQ crassitiem funis in singulis punctis, ita vt pondus portionis BM exponatur area APQD, et pondus elementi Mm areola PpqQ. Nunc ad naturam curuae OMB inueniendam ponatur $Op = t$, $pM = y$; et $AP = x$ atque $PQ = p$, erit $t + x$ quantitas constans, et $dt = -dx$. Pondus igitur funis BM erit $= \int p\,dx$, quod respondet in superiori aequatione ipsi $(D + E + F)$, atque quod ibi erat C hic nobis erit $p\,dx$, vel $p\,dt$ si ab O computamus; Cc vero erit y, et cQ subtangens $PT = \frac{y\,dt}{dy} = \frac{-y\,dx}{dy}$, atque $cd = dt$. Posito autem elemento dt constante huius respectu, quia y crescit, erit Dr in superiore casu $= ddy$. His ergo in aequatione superiore $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$ substitutis prodibit ista aequatio $\frac{yp\,dt}{f} = \frac{p\,dt\,dy}{dt} - \frac{ddy \int p\,dx}{dt}$, quae loco dt posito $-dx$ abit in hanc $\frac{yp\,dx^2}{f} = -ddy \int p\,dx - p\,dx\,dy$, vbi f denotat subtangentem AF in infimo

fimo catenae puncto B. Quare fi fit $x = 0$ debebit effe $\frac{-y\,dx}{dy} = f$, id quod aequatio iam indicat, facto enim $\int p\,dx = 0$ fit $\frac{y\,dx}{f} = -dy$.

§. 17. Ad hanc aequationem ad differentialem primi gradus reducendam pono $y = e^{\int z\,dx}$, erit $dy = e^{\int z\,dx} z\,dx$ et $ddy = e^{\int z\,dx}(dz\,dx + z^2\,dx^2)$ exiftente e numero, cuius log. eft $= 1$. His fubftitutis prodit $\frac{p\,dx}{f} = -dz\int p\,dx - z^2\,dx\int p\,dx - pz\,dx$, quae pofito $z = \frac{u}{\int p\,dx}$ tranfit in hanc $\frac{p\,dx}{f} = -du - \frac{u^2\,dx}{\int p\,dx}$, quae fi conftrui poterit, fimul habebitur curua quaefita. At per feries commodius definietur ex data abfciffa x applicata y. Hac quidem aequatione magnitudo ipfius applicatae y non determinatur, fed applicatarum inter fe relationes. Quare fi curua fuerit conftructa pro finito ipfius y valore, poftea applicatae n eadem ratione in infinitum diminuantur, quo prodeat curua quaefita.

§. 18. Si catena vbique fuerit eiusdem craffitiei ita vt p fit quantitas conftans; habebitur pro curuatura huius catenae quaefita haec aequatio $\frac{y\,dx^2}{f} = -x\,ddy - dx\,dy$, feu $\int y\,dx = -\frac{fx\,dy}{dx}$. Vnde fequens elegans huius curuae proprietas confequitur: aream APMB aequari facto ex conftante AF et portione Nt, quam tangens TM ad AB producta et verticalis MN abfcindunt, feu Nt femper proportionas eft areae APMB. Facta vero in hac aequatione fubftitutione $y = e^{\int z\,dx}$ prodibit $\frac{dx}{f} = -x\,dz - z^2 x\,dx - z\,dx$; atque facto $zx = u$ erit $\frac{dx}{f} = -du - \frac{u^2\,dx}{x}$. Quae aequatio, cum integrationem non admit-

admittat, ad ſeries eſt confugiendum. Dat autem aequatio $y\,dx^2 + fx\,ddy + f\,dx\,dy = 0$ ſequentem ſeriem, poſito a pro prima applicata AB; $y = a\left(1 - \frac{x}{1.f} + \frac{x^2}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16\,f^4} - \text{etc.}\right)$ eritque $dy = -\frac{a\,dx}{f}\left(1 - \frac{x}{1.2.f} + \frac{x^2}{1.4.3\,ff} - \frac{x^3}{1.4.9.4.f^3} + \text{etc.}\right)$. Ex quibus aequationibus omnia, quae de curua quaeſita requiri poſſunt, inueniri licet.

§. 19. Ex aequatione pro curua inuenta apparet facta x negatiua curuam infra B in infinitum quoque progredi, quae autem pars ad catenam repraeſentandam eſt inepta. Radius oſculi vero curuae in M eſt $\frac{dx^2}{-ddy}$, ob elementum curuae aequale elemento abſciſſae, eſt vero

$$\frac{dx^2}{ddy} = \frac{ff}{a\left(\frac{1}{1.2} - \frac{x}{1.2.3.f} + \frac{x^2}{1.4.3.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.4.5.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16.5.6f^4}\right)}.$$

Quare vbi haec ſeries in denominatore fit $= 0$, fit $ddy = 0$, ibique curua habebit punctum flexus contrarii.

§. 20. Tota autem curuae pars ſupra B, quae in infinitum aſcendit, ad catenam repraeſentandam erit accommodata; quare inueſtigari conuenit figuram portionis curuae ſupra B. Et quidem ſi $x = f$ ſeu AP = AF fiet $y = 0{,}223892\,a$, ſi $x = 2f$ ſit $y = -0{,}19654\,a$ curua ergo in hac altitudine in alteram partem rectae OA vergit. Loca in quibus curua per verticalem OA tranſit inueniri debent ex hac aequatione $1 = \frac{x}{1.f} - \frac{x^2}{1.4.f^2} + \frac{x^4}{1.4.9.f^3} - \frac{x^4}{1.4.9.16.f^4} + \text{etc.}$ quae dabit infinitos valores loco x, ſeu pro diſtantiis interſectionum curuae et verticalis ab imo puncto A. Primae autem interſectionis

nis O inuenitur distantia $OA = 1,44 f$, ita vt FO ipsius FA sit fere dimidium. Reliqua puncta intersectionum magis distant. Simili modo curua in infinitis punctis habebit tangentem verticalem, atque etiam infinita puncta flexus contrarii; Figuram curuae exhibui in fig. 7. in qua tria intersectionum puncta O, O, O repraesentantur. Figura 7.

§. 21. Consideremus etiam catenas non aequaliter crassas, quarum tamen figura facilius possit determinari. Ad hoc igitur ponamus $p = x^n$ et $\int p\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ex quibus conficitur haec aequatio; $\frac{y\,dx^2}{f} + \frac{x\,ddy}{n+1} + dx\,dy = 0$, quae reductione in §. 17 adhibita transit in hanc $\frac{x^n dx}{f} = -du - (n+1) u^2 x^{-n-1} dx$. Haec vero aequatio, quia conuenit cum ea, quam *Com. Riccati* proposuit, separationem admittit quoties $2n$ est numerus integer impar, siue affirmatiuus siue negatiuus. Sit $2n = -1$, seu $p = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ita vt crassities catenae sit reciproce vt radix quadrata ex longitudine catenae a puncto infimo B sumta; aequatio differentio-differentialis adeo integrationem admittet, erit nimirum $\frac{y^2 dx^2}{2f} + 2x\,ddy + dx\,dy = 0$, quae in dy ducta et integrata dat $\frac{y^2 dx^2}{2f} + x\,dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{2f}$ posita $AB = a$, seu $\frac{dx}{\sqrt{2fx}} = \frac{-dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, cuius integralis est $\sqrt{\frac{2x}{f}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} =$ arcui circuli, cuius cosinus est $\frac{y}{a}$, existente radio $= 1$.

§. 22. In hac igitur curuatura puncta O, O, O, etc. in quibus curua verticalem AO secat, habentur ponendo $y = 0$. Posita autem ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$, erit $-\int \frac{dy}{\surd(a^2 - y^2)}$ posito $y = 0$ terminus ex hac serie $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ etc. horum enim arcuum cosinus sunt $= 0$. Quare erit AO terminus quilibet ex hac serie $\frac{f\pi^2}{32}, \frac{9f\pi^2}{32}, \frac{25f\pi^2}{32}, \frac{49f\pi^2}{32}$, etc. Inter quosuis binos nodos applicata maxima est $= a$, vbi etiam tangens est verticalis. Facto autem $y = \pm a$ erit $\int \frac{-dy}{\surd(a^2 - y^2)}$ terminus ex hac serie $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$, etc. Distantiae ergo horum punctorum ab infimo A constituent hanc seriem $\frac{f\pi^2}{8}, \frac{f\pi^2}{2}, \frac{9f\pi^2}{8}, 2f\pi^2, \frac{25f\pi^2}{8}$ etc. vbi terminis primo, tertio, quinto etc. respondet $= -a$, reliquis $y = a$. Puncta flexus contrarii huius curuae habebuntur faciendo $ddy = 0$. Est vero $ddy = \frac{-y\,dx^2}{2fx} - \frac{dx\,dy}{2x} = \frac{-y\,dx^2}{2fx} + \frac{dx^2 \surd(a^2 - y^2)}{2x \surd 2fx}$. Quare puncta flexus contrarii ibi erunt, vbi est $\frac{y}{\surd(a^2 - y^2)} = \frac{\surd f}{\surd 2x}$, seu vbi est $\frac{\surd(a^2 - y^2)}{y} = -\int \frac{dy}{\surd(a^2 - y^2)}$. Ad ea igitur inuenienda quaerantur arcus, qui aequales sint suis cotangentibus; sint hae cotangentes $= t$ erit $\surd \frac{2x}{f} = t$ seu $x = \frac{ftt}{2}$. Hoc vero cum infinitis casibus accidere possit, prodibunt infinita puncta flexus contrarii.

§. 23. Quicunque autem fuerit numerus n aequatio differentio-differentialis $\frac{y\,dx^2}{f} + \frac{x\,ddy}{n+1} + dx\,dy = 0$ in seriem conuersa dabit $y = a\left(1 - \frac{x}{f} + \frac{(n+1)x^2}{1.2.(n+2)f^2} - \frac{(n+1)^2 x^3}{1.2.3.(n+2)(n+3)f^3} + \frac{(n+1)^3 x^4}{1.2.3.4.(n+2)(n+3)(n+4)f^4} - \text{etc.}\right)$. Ponatur $\frac{-(n+1)x}{f} = q$ erit $\frac{y}{a} = 1 + \frac{q}{1.(n+1)} + \frac{q^2}{1.2.(n+1)(n+2)} +$

q^3

$\frac{q^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (n+1)(n+2)(n+3)} +$ etc. Ad huius feriei fummam methodo mea conftruendam pono eius fummam effe $\int R z^m dz(1-z^b)^k : H$ hoc integrali ita accepto vt euanefcat pofito $z = 0$, et poftmodum pofito $z = 1$. H vero eft $= \int z^m dz(1-z^b)^k$ fi poft integrationem ponatur $z = 1$: at $m+1$ et $k+1$ et b debent effe numeri affirmatiui. Sit $R = 1 + Ag(1-z^b) + Bg^2(1-z^b)^2 + Cg^3(1-z^b)^3 +$ etc. quae feries talis debet accipi vt fummationem admittat. His pofitis $\frac{\int R z^m dz(1-z^b)^k}{H}$, ita acceptum vt euanefcat pofito $z = 0$, aequabitur huic feriei $1 + \frac{A(k+1)}{(m+b(k+1)+1)} bg + \frac{B(k+1)(k+2)}{(m+b(k+1)+1)(m+b)(k+2)+1)} b^2g^2 +$ etc. Cui ergo feriei illa inuenta pro $\frac{y}{a}$ eft aequalis ponenda.

§. 24. Pono autem $A = \frac{r}{\pi(\pi+\rho)}$, $B = \frac{A}{(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$, $C = \frac{B}{(\pi+4\rho)(\pi+5\rho)}$ etc. et fcripto s^2 loco $g(1-z^b)$ erit $R = 1 + \frac{r}{\varrho^2} e^{\frac{s}{\varrho}} s^{\frac{\rho-\pi}{\rho}} \int e^{\frac{-2s}{\varrho}} ds \int e^{\frac{s}{\varrho}} s^{\frac{\pi-\rho}{\varrho}} ds$. Quae duplex integratio ita eft accipienda vt facto $s = 0$, fiat $R = 1$, et $dR = 0$. Fiat nunc in hac ferie $bg = q$, vt quisque terminus huius feriei in terminum refpondentem illius transmutetur. Quo igitur termini indicis η fiant aequales, habebitur ifta aequatio $\eta(\eta+n)(\eta+k) = (2\eta\rho + \pi - 2\varrho)(2\eta\varrho + \pi - \rho)(\eta k + m + 1 + bk)$, ex qua erit $1 = 4b\varrho^2$; $k + n = 4\varrho^2(m + 1 + bk) + 2\varrho b(2\pi - 3\varrho)$; $nk = b(\pi - 2\varrho)(\pi - \varrho) + 2\varrho(2\pi - 3\varrho)(m + 1 + bk)$, atque $0 = (\pi - 2\varrho)(\pi - \varrho)(m + 1 + bk)$. Vnde tres fequuntur folutiones. Prima eft $\pi = 2\varrho$; hinc

 erit

erit $k + n = 4\varrho^2(m + 1 + bk) + 2\varrho^2 b$; $kn = 2\varrho^2(m + 1 + bk)$ et $1 = 4\varrho^2 b$, ex quibus prodit $k = \frac{1}{2}$; $b = 2$, $m = 2n - 2$, $\varrho = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ et $\pi = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, quae ſolutio ſemper locum habet, ſi modo $2n > 1$. Secunda ſolutio habetur ponendo $\pi = \varrho$, tumque erit $\varrho^2 = \frac{1}{4b}$; $k + n = 2\varrho^2(2m + 2 + 2bk - b)$ et $nk = -2\varrho^2(m + 1 + bk)$, vnde ſequitur $k = -\frac{1}{2}$; $b = 2$; $m = 2n$; $\varrho = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ et $\pi = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ haec ſolutio valet ſi modo $2n + 1$ eſt numerus affirmatiuus. Tertia ſolutio dat $m + 1 + bk = 0$, quae quia $m + 1$, b et $k + 1$ debent eſſe numeri affirmatiui, k erit inter 0 et -1 interceptum, ſit $k = -\varkappa$, erit $m + 1 = b\varkappa$; $\varrho^2 = \frac{1}{4b}$; $n - \varkappa = 2\varrho b(2\pi - 3\varrho)$ et $-n\varkappa = b(\pi - 2\varrho)(\pi - \varrho)$, atque ex his duae naſcuntur ſolutiones, quarum altera eſt $\varrho = 1$; $\pi = 2n + 1$; $k = + n - \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$; et $m + 1 = \frac{1}{8} - \frac{n}{4} = \frac{1 - 2n}{8}$. Altera ſolutio eſt $\varrho = 1$; $\pi = 2n + 2$, $k = n + \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$ et $m + 1 = -\frac{1 - 2n}{8}$; debet ergo n eſſe numerus negatiuus atque $-n < \frac{3}{2}$, et $-n > \frac{1}{2}$.

§. 25. Locum habeat ſecunda ſolutio vt maxime generalis, erit $s = \sqrt{\frac{q}{2}}(1 - z^2)$ et $R = 1 + 8e^{2s\sqrt{2}}\int e^{-4s\sqrt{2}} ds \int e^{2s\sqrt{2}} ds = \frac{e^{2s\sqrt{2}} + e^{-2s\sqrt{2}}}{2} = \frac{e^{2\sqrt{q(1-zz)}} + e^{-2\sqrt{q(1-zz)}}}{2}.$ Deinde inuenitur H ſi in $\int z^{2n} dz (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ita integrato, vt euaneſcat poſito $z = 0$, ponatur $z = 1$. Hoc inuento erit $\int \frac{z^{2n} dz (e^{2\sqrt{q(1-zz)}} + e^{-2\sqrt{q(1-zz)}})}{2H\sqrt{(1 - zz)}}$, ſi poſt integrationem ponatur $z = 1$, aequale ipſi $\frac{y}{a}$. Exibit enim z ex calculo et remanebit tantum q, cuius loco ſi ſi ſubſtituatur $\frac{-(n+1)x}{f}$ habebitur aequatio pro curua quaeſita in qua intederminatae x et y ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Ponatur $\sqrt{(1-zz)}=t$, erit $z=\sqrt{(1-tt)}$ et $dz=\frac{-t\,dt}{\sqrt{(1-tt)}}$, quibus ſubſtitutis erit $\frac{y}{a}=+\int\frac{(1-tt)^{\frac{2n-1}{2}}dt}{2H}(e^{2t\sqrt{q}}+e^{-2t\sqrt{q}})$ ſi ita integretur, vt euaneſcat poſito $t=0$, et poſtmodum ponatur $t=1$. Quoties igitur $\frac{2n-1}{2}$ eſt numerus integer affirmatiuus ſeu $2n$ numerus integer affirmatiuus impar, hoc integrale re ipſa poteſt exhiberi. Hinc igitur quoque fluit conſtructio aequationis Riccatianae cum ea, quam ante aliquot annos dedi, congruens.

ME-